30/05/2023

Le théorème de Belinskaya

Carderi, Joseph, Le Maître, Tessera
Belinskaya's theorem is optimal

<u>Pb. de Conjugaison:</u> Si $T, U \in Aut(X;\mu)$ ergodiques;
$\exists\, ?\ S \in Aut(X;\mu)$, $ST = US$

↳ <u>Thm de Dye:</u> équiv. orbitale "affaiblit trop"; on ne peut plus distinguer deux telles transformations.

↳ <u>Thm de Belinskaya:</u> Si T, U ergo (donc o.e.) + cdt sur le cocycle, alors T et U sont flip-conjuguées.

<u>Définition:</u> Soient $U, T \in Aut(X;\mu)$ ergodiques, et S une e.o. entre T et U, i.e STS^{-1} a les mêmes orbites que U. Alors on peut définir le <u>cocycle associé à U</u>; c_U par: $c_U : X \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$\forall x \in X: \quad ST^{c_U(x)}(x) = US(x)$$

<u>Théorème (Belinskaya, 1968):</u> Soient $T, U \in Aut(X;\mu)$, ergodiques, et soit S une o.e. entre T et U.
Supposons que c_U soit intégrable, i.e.

$$\int_X |c_U(x)|\, d\mu(x) < +\infty$$

Alors T et U sont flip-conjuguées: i.e. T ou T^{-1} est conjugué à U.

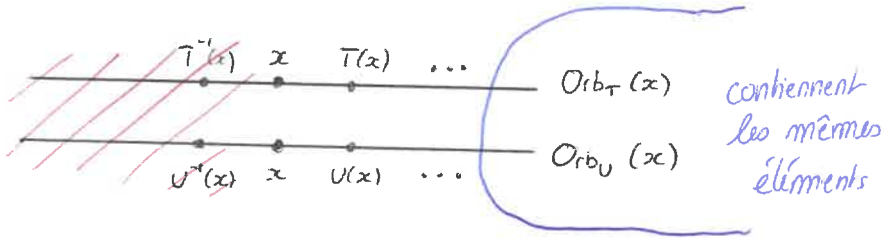
<u>Remarque:</u> Pour alléger les notations, on supposera que T et U ont les mêmes orbites, plutôt que de travailler avec STS^{-1} et U.

Notation : $T : X \to X$; $x \in X$; $I \subseteq \mathbb{Z}$

$$T^I(x) := \{ T^i(x) \mid i \in I \}$$

Théorème 1 : Soit $T \in \mathrm{Aut}(X;\mu)$ apériodique (i.e. $\forall^* x \in X$: $|\mathrm{Orb}_T(x)| = +\infty$) et soit $U \in \mathrm{Aut}(X;\mu)$ ayant les mêmes orbites que T. Si $\forall^* x \in X$: $T^{\mathbb{N}}(x) \triangle U^{\mathbb{N}}(x)$ est fini, alors T et U sont conjugués.

Preuve : (Katznelson)

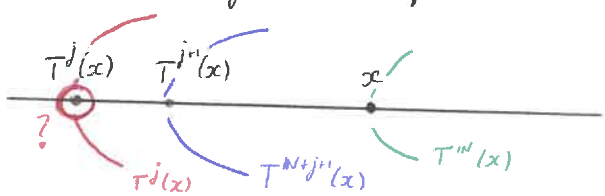


Claim : $\forall^* x \in X : \exists!\, j(x) \in \mathbb{Z}$ tq $|T^{\mathbb{N}+j(x)}(x) \setminus U^{\mathbb{N}}(x)| = |U^{\mathbb{N}}(x) \setminus T^{\mathbb{N}+j(x)}(x)|$

Preuve claim : Posons $\forall^* x \in X$:
(bien déf par hypothèse)

$$\tau_x : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ j & \longmapsto & |T^{\mathbb{N}+j}(x) \setminus U^{\mathbb{N}}(x)| - |U^{\mathbb{N}}(x) \setminus T^{\mathbb{N}+j}(x)| \end{array}$$

On fixe x et j. Lien entre $\tau_x(j)$ et $\tau_x(j+1)$?



Cas n°1 :

$T^j(x) \in U^{\mathbb{N}}(x)$

- $|T^{\mathbb{N}+j+1}(x) \setminus U^{\mathbb{N}}(x)| = |T^{\mathbb{N}+j}(x) \setminus U^{\mathbb{N}}(x)|$
- $|U^{\mathbb{N}}(x) \setminus T^{\mathbb{N}+j+1}(x)| = |\cancel{T}\, U^{\mathbb{N}}(x) \setminus T^{\mathbb{N}+j}(x)| + 1$

Cas n°2 :

$T^j(x) \notin U^{\mathbb{N}}(x)$

- $|T^{\mathbb{N}+j+1}(x) \setminus U^{\mathbb{N}}(x)| = |T^{\mathbb{N}+j}(x) \setminus U^{\mathbb{N}}(x)| - 1$
- $|U^{\mathbb{N}}(x) \setminus T^{\mathbb{N}+j+1}(x)| = |U^{\mathbb{N}}(x) \setminus T^{\mathbb{N}+j}(x)|$

Dans les 2 cas,

$\tau_x(j+1) = \tau_x(j) - 1$

Ainsi, $\tau_x(j) = \tau_x(0) - j$

Pour $j = \tau_x(0)$, $\tau_x(j) = 0$

$\boxed{C}$

On définit S par $S(x) := T^{j(x)}(x)$

$\longrightarrow$ $\boxed{S(x) \text{ est l'unique él}^t \text{ de } Orb_T(x) \text{ tq } |T^{\mathbb{N}}(S(x)) \setminus U^{\mathbb{N}}(x)| = |U^{\mathbb{N}}(x) \setminus T^{\mathbb{N}}(S(x))|}$

Quatre cas :

$$T^n(S(x)) \cap U^{\mathbb{N}}(x)$$

- $x \in$, $S(x) \in$
- $\not\ni x$, $\ni S(x)$
- $x \in$, $S(x) \notin$
- $\not\ni x$, $\not\ni S(x)$

Par des arguments similaires, dans tous les cas, "retirer x et $S(x)$" ne modifie pas l'égalité, i.e.

$$\boxed{\begin{array}{c} |T^{\mathbb{N}+1}(S(x)) \setminus U^{\mathbb{N}+1}(x)| = |U^{\mathbb{N}+1}(x) \setminus T^{\mathbb{N}+1}(S(x))| \\ |T^{\mathbb{N}}(TS(x)) \setminus U^{\mathbb{N}}(U(x))| = |U^{\mathbb{N}}(U(x)) \setminus T^{\mathbb{N}}(TS(x))| \end{array}}$$

en posant $x = U^{-1}(y)$ $\longrightarrow$ $|T^{\mathbb{N}}(TSU^{-1}(y)) \setminus U^{\mathbb{N}}(y)| = |U^{\mathbb{N}}(y) \setminus T^{\mathbb{N}}(TSU^{-1}(y))|$

Donc par unicité de $S(x)$; $\underline{\forall^* x \in X : TS(x) = SU(x)}$

Il reste à vérifier que $S \in Aut(X;\mu)$.

- $\underline{S \text{ bijecti}^{\circ}}$: $TS(x) = SU(x)$ $\iff T^{-1}S(x) = SU^{-1}(x)$ et par récurrence : $SU^{n+1}(x) = SU^n(U(x)) = SU^n(y)$
$= T^nS(y)$
$= T^nS(U(x))$
$= T^{n+1}S(x)$

Donc $\forall n \in \mathbb{Z} : T^nS = SU^n$

i.e. S induit une bijection sur chaque orbite (en partic. S bijecti°)

- $\underline{S \text{ p.m.p}}$: $(A_n := \{x \in X \mid S(x) = T^n(x)\})_{n \in \mathbb{Z}}$ partition de X (on autorise $\emptyset$)

Si $B \subseteq X$; $B = \bigsqcup_{\mathbb{Z}} B \cap A_n$

donc $\mu(S(B)) = \sum_{\mathbb{Z}} \mu(T^n(B \cap A_n)) = \sum_{\mathbb{Z}} \mu(B \cap A_n) = \mu(B)$ $\blacksquare$

Lemme : (Principe de transport de masse)

Soit $T \in \mathrm{Aut}(X;\mu)$, notons $\mathcal{R}_T = \{(x;T^n(x)) \mid x\in X,\ n\in\mathbb{Z}\}$.

Soit $f : \mathcal{R}_T \to \mathbb{N}$ (mesurable). On a $\displaystyle\int_X \sum_{\mathbb{Z}} f(x,T^n(x))\,d\mu(x) = \int_X \sum_{\mathbb{Z}} f(T^n(x),x)\,d\mu(x)$

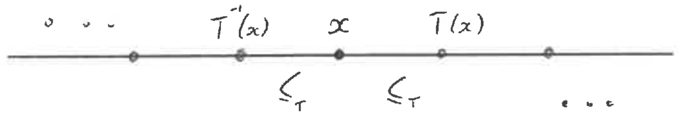
Preuve : (Tonelli) $$\int_X \sum_{\mathbb{Z}} f(x,T^n(x))\,d\mu(x) = \sum_{\mathbb{Z}}\int_X f(x,T^n(x))\,d\mu(x) = \sum_{\mathbb{Z}}\int_X f(T^{-n}(y),y)\,d\mu(y)$$
$$= \sum_{\mathbb{Z}}\int_X f(T^n(y),y)\,d\mu(y) = \int_X \sum_{\mathbb{Z}} f(T^n(x),x)\,d\mu(x) \qquad \blacksquare$$

Théorème (Belinskaya) : Soient $T, U \in \mathrm{Aut}(X,\mu)$, ergodiques et ayant les m̂ orbites. Si c_U est intégrable, alors T et U sont flip-conjugués.

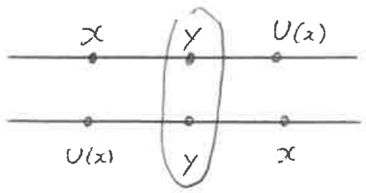
Preuve : On définit sur une T-orbite l'ordre total $\leq_T$ défini par

$x \leq_T y \iff y = T^n(x),\ n \geq 0$ $(\exists n \geq 0$ t.q. ...$)$ (et $x <_T y$ si $x \leq_T y$ et $x \neq y$)

$<_T$ $\qquad$ $>$



On définit de plus $f : \mathcal{R}_T \to \mathbb{N}$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq_T y <_T U(x) \ \underline{\text{ou}}\ U(x) <_T y \leq_T x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$c_U : X \to \mathbb{Z}$
def par $U(x) = T^{c_U(x)}(x)$

On a alors $f(x,T^n(x)) = 1 \iff \begin{cases} 0 \leq n < c_U(x) \\ \text{ou} \\ c_U(x) < n \leq 0 \end{cases}$

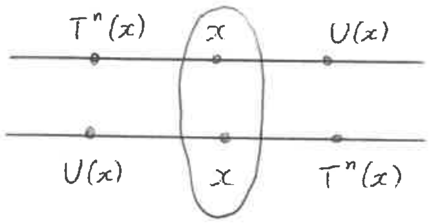
On a $\sum_{\mathbb{Z}} f(x ; T^n(x)) = |C_U(x)|$, et ainsi :

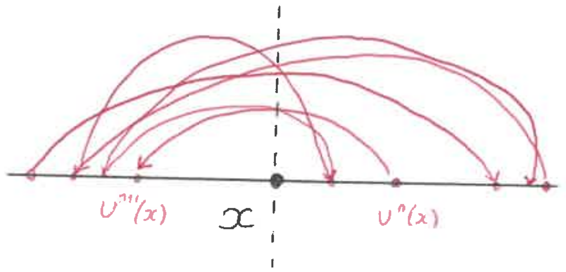
$$\int_X \sum_{\mathbb{Z}} f(x, T^n(x))\, d\mu(x) = \int_X |C_U(x)|\, d\mu(x) < +\infty \quad \text{(par hyp.)}$$

$$\parallel$$

$$\int_X \sum_{\mathbb{Z}} f(T^n(x), x)\, d\mu(x) \quad \text{d'après le lemme.}$$

Donc $\forall^* x \in X$: $\sum_{\mathbb{Z}} f(T^n(x), x) < +\infty$ i.e. $\boxed{\exists \text{ nb fini de } n \in \mathbb{Z} \text{ tq } f(T^n(x), x) = 1}$





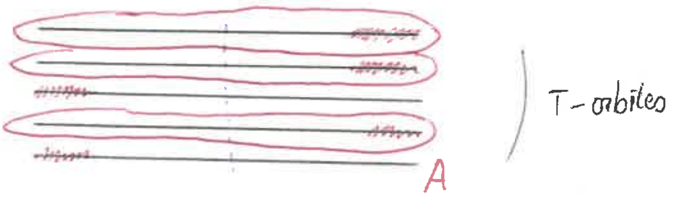
ne peut se produire qu'un nombre fini de fois ! (car $\forall^* x \in X$: $|Orb_U(x)| = +\infty$)

Donc, sauf pour un nombre fini de $n \in \mathbb{N}$;

$$\begin{pmatrix} x \leqslant_T U^n(x) \\ \text{ou} \\ U^n(x) \leqslant_T x \end{pmatrix} \iff (U^n(x)) \xrightarrow[\leqslant_T]{} \pm \infty$$

(on "reste toujours du même côté de l'orbite) $\longrightarrow$ ne dépend pas de x

On a décrit le comportement de $U^n(x)$ $(n \geqslant 0)$ sur une orbite. Montrons que c'est en fait le même sur toutes les T-orbites :



A est U-invariant, donc par ergodicité de U ; A est de mesure nulle ou pleine.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Quitte à remplacer } U \text{ par } U^{-1}, \text{ OPS} \\ \forall^* x \in X : x \leqslant_T U^n(x), \text{ sauf pour un} \\ \text{nb fini de } n \in \mathbb{N}. \end{array}}$$

6/6

Par l'argument symétrique, pour $n \leq 0$; $\forall^* x \in X$

de même $\left(\begin{array}{l} x \leq_T U^n(x) \\ \text{ou} \\ x \geq_T U^n(x) \end{array} \right.$ sauf pour un nb fini de $n \leq 0$.

Mais comme on a choisi $\left(\begin{array}{l} x \leq_T U^n(x) \\ n \geq 0 \ (\text{si sauf un nombre fini}) \end{array} \right)$; il faut

que $U^n(x) \leq_T x$ sauf pour un nombre fini de $n \leq 0$.

En effet ; U a les mêmes orbites que T ; donc les éléments de $T^{-\mathbb{N}}(x)$ doivent être atteints par les puissances négatives de U.
(De plus, sinon, U admettrait un domaine fondamental, ce qui n'est pas possible)

Au final ; $\forall^* x \in X : |T^{\mathbb{N}}(x) \triangle U^{\mathbb{N}}(x)| < +\infty$

Appliquer le théorème 1 conclut la preuve.

$\blacksquare$